

Studium difrakčních jevů – TEORIE – doplněk:

Odvození výrazů pro difrakční maxima (popř. minima) na štěrbině, dvojštěrbině a mřížce jsou zpravidla uvedena na středoškolské úrovni, což je založeno na vhodném zavedení a vyjádření dráhového rozdílu. To je také problém, proč jsou v některých materiálech tyto odvození uvedena chybně. Korektní odvození je skutečně ze skládání vlnění, to však překračuje rozsah středoškolské fyziky. Kdo se chce dozvědět o odvození těchto vzorců více a podívat se na „korektní“ odvození vzorců, může si nastudovat následující materiál.

(Následující odstavce jsou zde uvedeny jen pro zájemce.)

Rovnice vlny a zavedení komplexní rovnice vlny

Šíření světla lze popsat pomocí rovnice pro harmonickou vlnu, kterou známe již ze střední školy. V případě okamžité výchylky ve směru osy y a šíření fáze ve směru osy x popíšeme toto vlnění následující rovnicí:

$$y(x, t) = y_m \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda} \right) \right], \quad (1)$$

kde $y(x, t)$ – okamžitá výchylka v daném bodě x a časovém okamžiku t ,
 y_m – maximální výchylka (tzv. amplituda),
 T – časová perioda vlnění (popř. perioda zdroje generujícího vlnění),
 λ – tzv. vlnová délka (prostorová perioda vlnění),
 t – okamžik, ve kterém určujeme okamžitou výchylku,
 x – místo na ose x , ve kterém určujeme okamžitou výchylku.

Znaménko $+$ nebo $-$ v argumentu harmonické funkce stanoví směr šíření vlnění ($+$ záporný směr osy x , $-$ kladný směr osy x).

Světlo je elektromagnetické vlnění, můžeme tedy jeho šíření popsat pomocí vlnění elektrické a magnetické složky. Protože Maxwellovy rovnice jasně určují vztah mezi magnetickou a elektrickou složkou, používá se pro popis světla rovnice jen pro složku elektrickou. Pro popis složky elektrické se využívá veličina intenzita elektrického pole, což je vektorová veličina.

Rovnici elektrického vlnění (resp. celé světelné vlny) pak lze popsat následujícím způsobem:

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda} \right) \right], \quad (2)$$

kde jednotlivé veličiny odpovídají předchozí rovnici (1). Jedinou změnou je, že místo kmitání okamžité souřadnice y nyní kmitá vektor elektrické intenzity (dle zvyklostí používaných v popisu elektromagnetických vln byla amplituda označena jako E_0 a nikoliv jako E_m)

Pro skládání vlnění nám však nestačí popis vlnění v jediné ose. Pokusíme se tedy tuto rovnici rozšířit pro obecnější směr šíření. Tento směr šíření si udáme tzv. **směrovým vektorem**. Směrový vektor se označuje \vec{s} a je to jednotkový vektor, který jednoznačně určuje směr šíření daného vlnění.

Pochopitelně místo, ve kterém popisujeme vlnění, nebude určeno jen souřadnicí x , ale bude popsáno obecným polohovým vektorem, ten si označíme \vec{r} .

Rovnici (2) pak lze přepsat do nové podoby:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\vec{s} \cdot \vec{r}}{\lambda} \right) \right], \quad (3)$$

kde $\vec{s} \cdot \vec{r}$ je skalární součin polohového a směrového vektoru. Znaménko před výrazem je jen mínus, protože případnou změnu na plus „zařídí“ znaménko skalárního součinu při opačném směru šíření.

Nyní, zcela pro potřeby dalšího postupu, si rovnici (3) upravíme do tvaru, který nám později poslouží pro zavedení komplexního tvaru této rovnice.

Roznásobením výrazu v argumentu harmonické funkce dostaneme:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi \vec{s}}{\lambda} \cdot \vec{r} \right)$$

Zatímco pro první člen v argumentu harmonické funkce použijeme známý výraz: $\omega = \frac{2\pi}{T}$, výraz $\frac{2\pi \vec{s}}{\lambda}$ je zatím pro nás něčím novým. Jedná se o vektor, jehož velikost je dána podílem 2π a λ a směr je totožný se směrem šíření vlnění. Je to vektor, který docela jednoznačně popisuje šíření daného vlnění – záleží na vlnové délce a na směru šíření, což jsou pro vlnění důležité parametry.

Z tohoto důvodu je tento výraz definován jako tzv. **vlnový vektor** \vec{k} :

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{s}$$

Užitím výše zmíněných vztahů lze rovnici (3) přepsat do podoby:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (4)$$

Výraz (4) ukazuje asi nejjednodušší (nejen pro zápis) rovnici obecného elektrického vlnění určeného vlnovým vektorem \vec{k} v místě daném polohovým vektorem \vec{r} v časovém okamžiku t .

Pro zavedení komplexního zápisu této vlnové rovnice si výraz (4) upravíme tak, abychom nahradili harmonickou funkci sinus funkcí kosinus. Uvědomíme-li si, že obě funkce mají stejný tvar, jen jsou fázově posunuty, můžeme výraz (4) přepsat do podoby:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0),$$

kde φ_0 jako počáteční fáze „řeší“ nejen posun kosinu vůči sinu, ale zahrnuje i skutečnou počáteční fázi daného vlnění (zatím jsme uvažovali počáteční fázi rovnou 0).

K čemu je tato úprava dobrá? Podívejme se dále. Využijeme obecně platného výrazu známého z komplexních čísel:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

kde i je komplexní jednotka.

Harmonická vlna pak lze zapsat v komplexním tvaru¹ (který je, mimo jiného, také řeším Maxwellových rovnic):

$$\hat{\vec{E}} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0)}$$

kde počáteční fázi φ_0 (resp. výraz $e^{i\varphi_0}$) lze zahrnout do komplexní amplitudy a tím získat jednodušší výraz:

$$\boxed{\hat{\vec{E}} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}} \quad (5)$$

Výraz (5) je tzv. **komplexní vyjádření** (rovinné) harmonické vlny. Tento výraz sice vypadá asi děsivěji než výraz (4), je však (díky funkci e^x) výhodný pro operace v diferenciálním a integrálním počtu. Je třeba však vědět, že *smysl má pouze reálná část!*

Energie elektromagnetické vlny

Pro zjišťování difrakčních a interferenčních maxim a minim je třeba z rovnice vlnění umět vyjádřit energii výsledného elektromagnetického vlnění. K tomu to se používá tzv. **Poyntingův vektor**. Tento vektor popisuje transport energie prostřednictvím elektromagnetického pole. Jeho velikost udává plošnou hustotu toku výkonu, směr a orientace se shodují se směrem a orientací toku výkonu. Nás však nebude zajímat přímo tato veličina, ale velikost její střední hodnoty, co je přímo měřitelná veličina a od její hodnoty se odvíjí i intenzita světla.

Střední hodnota velikosti Poyntingova vektoru \vec{S} je dána vztahem:

$$\boxed{|\vec{S}| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |\vec{E}_0|^2}$$

nebo (v komplexním tvaru):

$$|\vec{S}| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (\hat{\vec{E}}_0 \hat{\vec{E}}_0^*),$$

kde $\hat{\vec{E}}_0^*$ označuje komplexně sdružené číslo k číslu $\hat{\vec{E}}_0$.

Jako ilustraci užití velikosti střední hodnoty Poyntingova vektoru si ukážeme případ interference dvou paprsků. Získaný výraz budeme dále potřebovat při skládání paprsků na více štěrbinách.

Mějme dva koherentní světlené paprsky se stálým fázovým rozdílem $\Delta\varphi$, které dopadají do téhož bodu.

¹ Komplexní čísla budeme nadále značit stříškou, komplexně sdružená čísla hvězdičkou.

První paprsek můžeme popsat rovnicí vlnění E_1 :

$$\hat{E}_1 = \hat{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

Druhý paprsek s fázovým rozdílem $\Delta\varphi$ bude mít rovnici:

$$\hat{E}_2 = \hat{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \Delta\varphi)}$$

Výsledné vlnění bude dáno superpozicí:

$$\begin{aligned} \hat{E} &= \hat{E}_1 + \hat{E}_2 = \\ &= \hat{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} + \hat{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \Delta\varphi)} = \\ &= \hat{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} + \hat{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} e^{i\Delta\varphi} = \\ &= \hat{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} (1 + e^{i\Delta\varphi}) \end{aligned}$$

Mimochodem, všimněte si zde výhodnosti exponenciálního zápisu – jak lehce umožnil „vytáhnout“ výraz s fázovým rozdílem.

Nyní nás zajímá energie výsledného vlnění, využijeme vlastnost Poyntingova vektoru:

$$\begin{aligned} |\vec{S}| &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (\hat{E} \hat{E}^*) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |E_0|^2 \left(1 + \frac{e^{i\Delta\varphi} + e^{-i\Delta\varphi}}{2 \cos \Delta\varphi} + e^0 \right) \\ |\vec{S}| &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |E_0|^2 2(1 + \cos \Delta\varphi) \end{aligned} \quad (6)$$

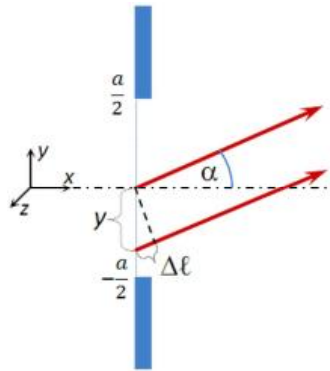
Vidíme, že výsledná energie závisí na fázovém rozdílu $\Delta\varphi$. Může nastat případ, že výsledná intenzita světla je 0 (*destruktivní interference*) nebo se naopak 4× zvětší (*konstruktivní interference*).

Difrakce na štěrbině

Dopadá-li světlo na štěrbinu šířky a , stává se každý bod této štěrbiny zdrojem záření, popsatelného výše uvedenou rovnicí vlnění², a na stínítku dochází ke složení těchto vln. Výsledné vlnění v daném bodě stínítka pak získáme jako součet (integrál) jednotlivých elementárních vlnění.

Zvolíme si souřadný systém tak, že osa x bude osou štěrbinu, štěrbinu bude mít rozměr ve směru osy y (viz obr. 1). Souřadnice okrajů štěrbinu pak budou mít hodnoty $-\frac{a}{2}$ a $\frac{a}{2}$. To také budou meze následné integrace.

² Toto není zcela správně! Pokud bychom chtěli být úplně zcela přesní, museli bychom světlo šířící se z jednotlivých bodů štěrbinu popisovat válcovou vlnou a nikoliv rovinnou. Zavedení rovnice vlnění s válcovou vlnoplochou by však tento zjednodušený text značně zkomplikovalo a na odvození vzorců pro difrakční maxima a minima základních difrakčních elementů stejně nemělo žádný vliv. Uvážíme-li stínítko dostatečně daleko od difrakčního elementu, lze dopadající válcovou vlnu v dobrém přiblížení nahradit rovinnou vlnou. Případné zájemce odkazují na VŠ studijní materiály.



Obr. 1 – difrakce na štěrbině – určení dráhového rozdílu

Jako referenční paprsek použijeme paprsek procházející středem štěrbiny, ten lze popsat vlnovou rovnicí (5). Obecný paprsek bude mít rovnici lišící se fázovým rozdílem $\Delta\varphi$ daným úhlem šíření α a jeho vzdáleností od středu štěrbiny y . Pro vyjádření fázového rozdílu $\Delta\varphi$ v závislosti na dráhovém rozdílu $\Delta\ell$ využijeme vztahu:

$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta\ell}{\lambda} \rightarrow \boxed{\Delta\varphi = k \Delta\ell} \quad (7)$$

Z geometrie (viz obr. 1) pro $\Delta\ell$ získáváme výraz $\Delta\ell = y \sin\alpha$ a tedy $\Delta\varphi = k y \sin\alpha$. Rovnice pro obecný paprsek bude:

$$\hat{\vec{E}} = \hat{\vec{E}}_0 e^{i[\omega t - k(r - y \sin\alpha)]}$$

Tento výraz popisuje vlnění z libovolného bodu štěrbiny. Je to též potřebný výraz pro součet (integrál přes šířku štěrbiny) paprsků dopadajících do bodu P:

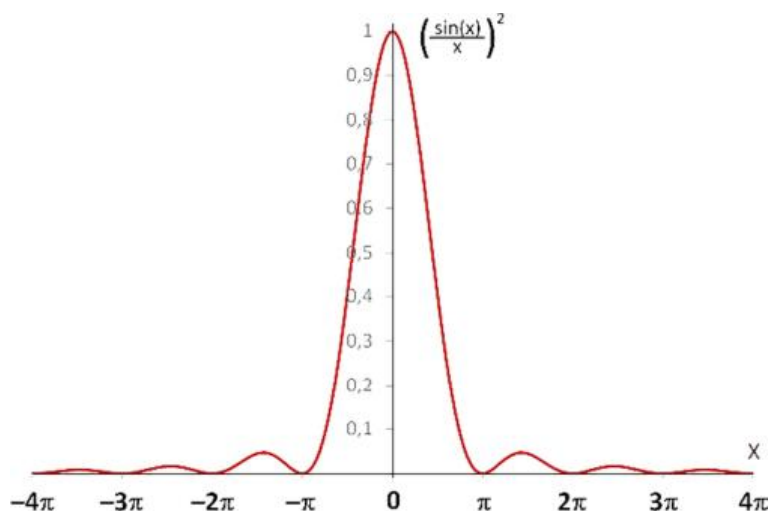
$$\begin{aligned} \hat{\vec{E}}(P) &= \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \hat{\vec{E}}_0 e^{i[\omega t - k(r - y \sin\alpha)]} dy = \frac{\hat{\vec{E}}_0}{a} e^{i(\omega t - kr)} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{i k y \sin\alpha} dy = \\ &= \frac{\hat{\vec{E}}_0}{a} e^{i(\omega t - kr)} \left[\frac{e^{i k y \sin\alpha}}{i k \sin\alpha} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{\hat{\vec{E}}_0}{a} e^{i(\omega t - kr)} \left(\frac{e^{i k \frac{a}{2} \sin\alpha} - e^{-i k \frac{a}{2} \sin\alpha}}{i k \sin\alpha} \right) = \\ &= \frac{\hat{\vec{E}}_0}{a} e^{i(\omega t - kr)} \left\{ \frac{\cos\left(i k \frac{a}{2} \sin\alpha\right) + i \sin\left(i k \frac{a}{2} \sin\alpha\right) - \cos\left[i k \left(-\frac{a}{2}\right) \sin\alpha\right] - i \sin\left[i k \left(-\frac{a}{2}\right) \sin\alpha\right]}{i k \sin\alpha} \right\} = \\ &= \frac{\hat{\vec{E}}_0}{a} e^{i(\omega t - kr)} \left\{ \frac{i \sin\left(i k \frac{a}{2} \sin\alpha\right) + i \sin\left(i k \frac{a}{2} \sin\alpha\right)}{i k \sin\alpha} \right\} = \hat{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - kr)} \frac{2i \sin\left(\frac{1}{2} k a \sin\alpha\right)}{i k a \sin\alpha} \\ &= \hat{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - kr)} \frac{2 \sin\left(\frac{1}{2} k a \sin\alpha\right)}{k a \sin\alpha} \\ \hat{\vec{E}}(P) &= \hat{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - kr)} \frac{\sin\left(\frac{1}{2} k a \sin\alpha\right)}{\frac{1}{2} k a \sin\alpha}, \end{aligned} \quad (8)$$

kde r – optická dráha od středu štěrbině na stínítko,
 $(\omega t - kr)$ – fáze vlny ze středu štěrbině,
 y – vzdálenost zdroje vlnění od středu,
 $[\omega t - k(r - y \sin \alpha)]$ – fáze vlny vycházející z obecného místa štěrbině (viz dříve).

Intenzita světla je dána tzv. Poyntingovým vektorem. Díky tomu je intenzita výsledného světla přímo úměrná kvadrátu elektrické intenzity. Pro výslednou intenzitu světla I tedy z výrazu (8) dostáváme:

$$I \approx \frac{\sin^2(\frac{1}{2} k a \sin \alpha)}{(\frac{1}{2} k a \sin \alpha)^2} \quad (9)$$

Lomený výraz ve výrazu (9) určuje tvar průběhu intenzity. To ilustruje obrázek 2, kde je vynesena funkce $f(x) = \frac{\sin^2(x)}{x^2}$. Podobnost s průběhem intenzity světla v difrakčním obrazci je zjevná.



Obr. 2 – průběh funkce určující intenzitu světla difrakčního obrazce na štěrbině

Maxima vznikají pro násobky π (vyjma nuly). Pro podmínku difrakčního minima je nutné položit argument funkce sinus (viz výraz (9)) rovný celočíselným násobkům π .

$$\frac{1}{2} k a \sin \alpha = m\pi ,$$

kde $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Dosažením pro velikost vlnového vektoru $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ získáme výraz:

$$\frac{1}{2} \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \alpha = m\pi ,$$

ze kterého po úpravě získáme **podmínku minima**:

$$\boxed{a \sin \alpha = m\lambda} \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots ,$$

kde a – šířka difrakční štěrbiny,
 α – úhel mezi osou štěrbiny a směrem rozptýlených paprsků,
 λ – vlnová délka použitého světla.

Difrakce na dvojštěrbíně

V případě více štěrbin vstupuje do hry též interference – skládání paprsků z jednotlivých štěrbin. Skládání dvou paprsků jsme si již ukázali při zavádění Poyntingova vektoru, můžeme tedy rovnou uvažovat s tím, že z výrazu (6) pro intenzitu výsledného paprsku plyne:

$$I = I_0 2(1 + \cos \Delta\varphi)$$

Uvážíme-li tedy, že na dvojštěrbíně probíhá difrakce na štěrbině a zároveň interference dvojice štěrbin, platí pro výraz světelné intenzity:

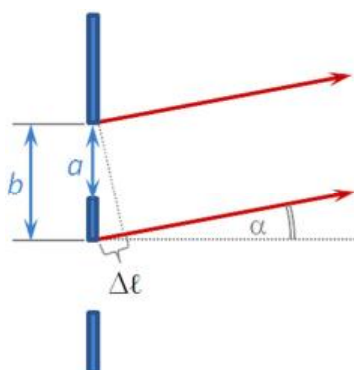
$$I \approx \underbrace{\frac{\sin^2\left(\frac{1}{2} k a \sin \alpha\right)}{\left(\frac{1}{2} k a \sin \alpha\right)^2}}_{\text{difrakce na štěrbině}} \cdot \underbrace{2(1 + \cos \Delta\varphi)}_{\text{interference}} \quad (10)$$

Interferenční člen ve výrazu (10) si upravíme:

$$2(1 + \cos \Delta\varphi) = 4 \underbrace{\left(\frac{1 + \cos \Delta\varphi}{2}\right)}_{\cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2}},$$

čímž získáme výraz (10) v upravené podobě:

$$I \approx \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2} k a \sin \alpha\right)}{\left(\frac{1}{2} k a \sin \alpha\right)^2} 4 \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2} \approx \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2} k a \sin \alpha\right)}{\left(\frac{1}{2} k a \sin \alpha\right)^2} \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2} \quad (11)$$



Obr. 3 – difrakce na dvojštěrbíně – určení dráhového rozdílu

Z geometrie dvojice štěrbin (viz obr. 3) získáme vztah:

$$b \sin \alpha = \Delta\ell,$$

který použijeme do vztahu (7), abychom získali:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} b \sin \alpha$$

Tento vztah využijeme pro nalezení maxima výrazu $\cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2}$ ve vztahu (11). Kvadrát funkce kosinus nabývá maximálních hodnot pro argument roven celočíselným násobkům π :

$$\frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\frac{2\pi}{\lambda} b \sin \alpha}{2} = m \pi$$

Úpravou získáme **podmínku maxima na dvojštěrbině**:

$$\boxed{b \sin \alpha = m \lambda} \quad m = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

kde b – vzdálenost difrakčních štěrbin,
 α – úhel mezi osou štěrbin a směrem rozptýlených paprsků,
 λ – vlnová délka použitého světla.

Difrakce na více štěrbinách (mřížce)

Nyní odvodíme vztah platný pro více štěrbin, popř. pro optickou mřížku. Oproti dvojštěrbině se zde objeví příspěvky od dalších osvětlených štěrbin. Předpokládáme tedy, že ve výrazu (6) přibudou příspěvky od paprsků vycházející v pravidelných vzdálenostech z dalších štěrbin.

Výraz pro výslednou elektrickou intenzitu (danou interferencí) v místě dopadu N paprsků bude dán N členy (pro ideální optickou mřížku bychom jich mohli uvažovat nekonečně mnoho):

$$\begin{aligned} \hat{\vec{E}} &= \hat{\vec{E}}_1 + \hat{\vec{E}}_2 + \dots + \hat{\vec{E}}_N = \\ &= \hat{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \underbrace{\left(1 + e^{i\Delta\varphi} + e^{i2\Delta\varphi} + \dots + e^{iN\Delta\varphi} \right)}_{\text{součet geometrické řady}} \\ \hat{\vec{E}} &\approx \frac{1 - e^{iN\Delta\varphi}}{1 - e^{i\Delta\varphi}} \end{aligned}$$

A pro intenzitu světla (střední hodnota Poyntingova vektoru) dostaneme:

$$I \approx \underbrace{\frac{\sin^2 \left(\frac{1}{2} k a \sin \alpha \right)}{\left(\frac{1}{2} k a \sin \alpha \right)^2}}_{\text{difrakce na štěrbině}} \underbrace{\frac{1 - \cos N\Delta\varphi}{1 - \cos \Delta\varphi}}_{\text{interference}}$$

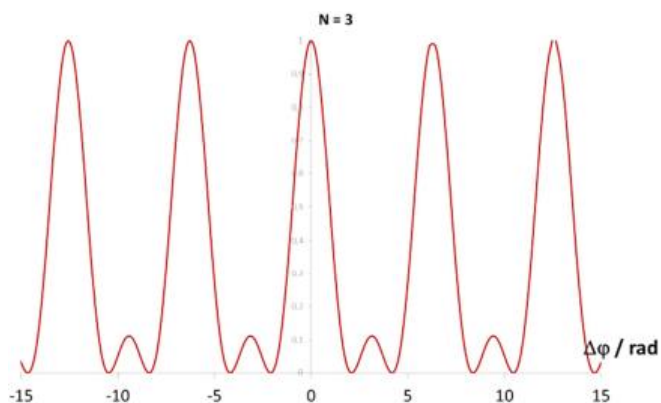
Hledáme-li maxima intenzity dané pouze interferencí paprsků z jednotlivých štěrbin, bude intenzita světla úměrná jen interferenčnímu členu:

$$I \approx \frac{1 - \cos N\Delta\varphi}{1 - \cos \Delta\varphi},$$

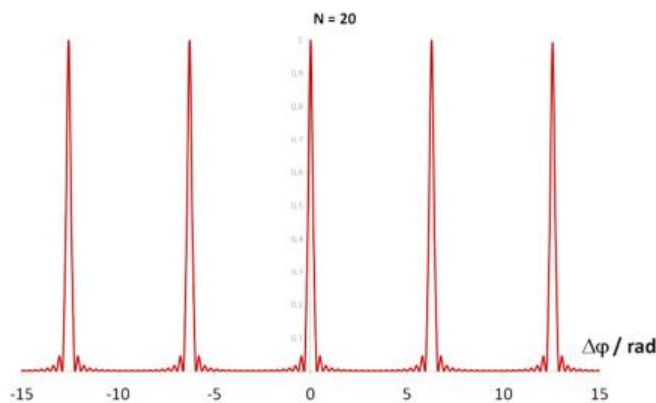
který se dá pomocí vzorce pro poloviční argument $\left| \sin \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$ upravit do tvaru:

$$I \approx \frac{\sin^2\left(\frac{N\Delta\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)} \quad (13)$$

Znormovaný podíl těchto kvadrátů sinů si vyneseme do grafu, abychom viděli, jak tento výraz ovlivňuje tvar difrakčního obrazce – viz obr. 4 (vyneseno pro $N = 3$) a obr. 5 (pro $N = 20$).

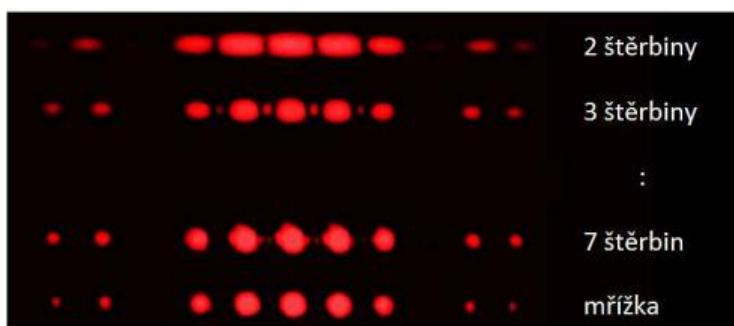


Obr. 4 – průběh členu určující intenzitu světla difrakčního obrazce pro 3 štěrbin



Obr. 5 – průběh členu určující intenzitu světla difrakčního obrazce pro 20 štěrbin

To odpovídá následujícímu obrázku 6, na kterém jsou fotografie difrakčních obrazců pro různé počty štěrbin.



Obr. 6 – srovnání difrakčních obrazců pro různé počty štěrbin

Maxima výrazu (13) nastávají pro: (typ výrazu „ $\frac{0}{0}$ “)

$$\frac{\Delta\varphi}{2} = m\pi$$

kde $m = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

a po dosazení výrazu (7) za $\Delta\varphi$ získáme:

$$\frac{1}{2} \frac{2\pi}{\lambda} b \sin \alpha = m\pi,$$

což lze upravit do hledaného výrazu **podmínky maxima na optické mřížce** (všimněte si shodnosti se vztahem (12)):

$$b \sin \alpha = m \lambda$$

$$m = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

kde b – vzdálenost sousedních štěrbin (mřížková konstanta),
 α – úhel mezi osou štěrbin a směrem rozptýlených paprsků,
 λ – vlnová délka použitého světla.